РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА 2011

IV година

(решенија на задачите)

Задача 1. При интеракција на космичкото зрачење со атомите од горните слоеви на атмосферата се создаваат елементарни честички кои се движат со релативистички брзини v. Честичките имаат кратко време на живот и во просек, по поминат пат од $3{,}00\,\mathrm{km}$ се распаѓаат. Експериментално е утврдено дека кога тие честички се движат многу бавно имаат просечно време на живот од $1{,}00\,\mu\mathrm{s}$. Со колкава брзина тие се движат низ атмосферата?

Решение: Времето на живот на честичките во координатен систем поврзан со Земјата е еднакво на времето во текот на кое тие се движат во однос на Земјата

$$t = \frac{l}{v}. \qquad (1)$$

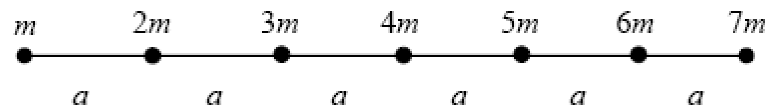
Бидејќи времето t е определено во референтен систем во однос на кој тие се движат со релативистичка брзина, врската меѓу t и сопственото време на живот t_0 се добива од релацијата за дилатација на времето

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Ако се изедначат горните релации за брзината на движење на честичките низ атмосферата се добива

$$v = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{ct_0}{l}\right)^2+1}} \approx 0{,}995\ \mathrm{c} \approx 2{,}98\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}. \qquad (3)$$

Задача 2. На метална прачка со занемарливо мала маса на еднакви растојанија едно од друго се наредени 7 топчиња (слика 1). Масите на топчињата се: m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, $6m$ и $7m$. На кое место на металната прачка треба да се постави потпорна точка, за така добиениот лост да биде во рамнотежа? Од корист може да бидат следниве формули: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ и $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



Слика 1

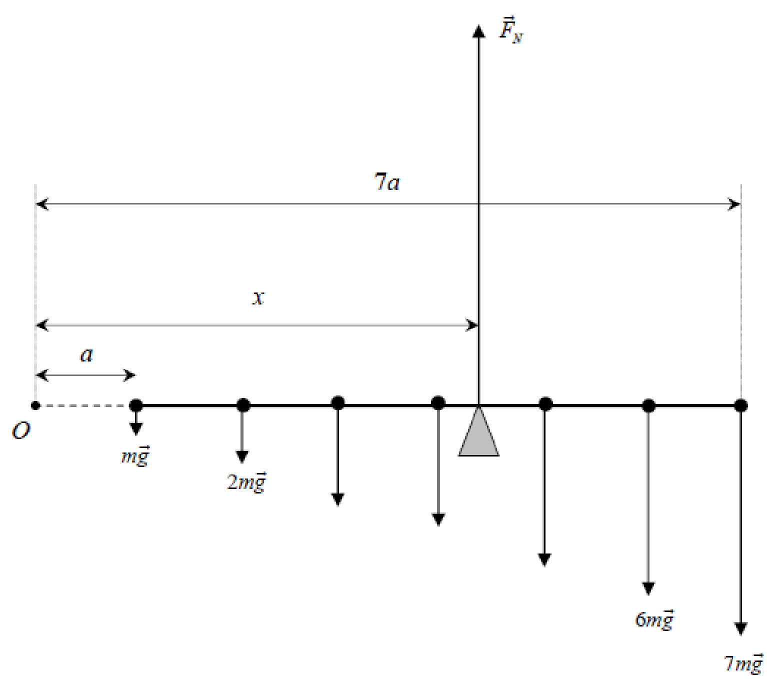
Решение:

I начин:

Погодно е координатниот почеток да го поставиме на растојание a лево од топчето со маса m (како на сликата). Изборот на координатниот почеток е произволен. Лостот ќе биде во рамнотежа доколку се задоволени следните услови:

а) Резултантата од сите сили што дејствуваат на лостот да биде еднаква на нула, т.е.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad (1)$$



Од сликата се гледа дека равенката (1) може да се запише во следната скаларна форма

$$(mg + 2mg + ... + 7mg) - F_{\mathrm{N}} = 0\,, \tag{2}$$

каде што F_N е силата на нормална реакција на потпорната точка на лостот, а g е Земјиното забрзување. Од равенката (2) се добива

$$mg(1 + 2 + ... + 7) = F_{\mathrm{N}}\,, \tag{3}$$

б) Резултантниот момент на силите во однос на координатниот почеток да е еднаков на нула, т.е.

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}\,, \tag{4}$$

Од сликата се гледа дека равенката (4) ја има следната форма:

$$(mga + 2mg \cdot 2a + ... + 7mg \cdot 7a) - F_{\mathrm{N}} \cdot x = 0\,, \tag{5}$$

Од равенката (5) се добива:

$$mga(1^2 + 2^2 + ... + 7^2) = F_{\mathrm{N}} \cdot x\,, \tag{6}$$

Ако ги поделиме равенките (6) и (3) за x се добива:

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + ... + 7^2}{1 + 2 + ... + 7} a = \frac{\frac{7(7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{6}}{\frac{7(7+1)}{2}} a = \frac{2 \cdot 7 + 1}{3} a = 5a\,. \qquad .$$

Оттука можеме да заклучиме дека потпорната точка на лостот треба да се постави на местото на топчето со маса 5*m*.

II начин:

Резултатот може да се добие со наоѓање на центарот на маса на системот. Центарот на маса на системот од топчиња во однос на координатниот почеток *O* е (да се види сликата):

$$x = \frac{ma + 2m \cdot 2a + ... + 7m \cdot 7a}{m + 2m + ... + 7m} = \frac{(1^2 + 2^2 + ... + 7^2)ma}{(1 + 2 + ... + 7)m} = 5a\,.$$

Задача 3. Вжарена метална топка со радиус 10,0 cm зрачи со моќност од 500 W. Сметајќи дека топката зрачи рамномерно во сите правци како апсолутно црно тело, да се најде брановата должина која одговара на максимумот на емисија. Да се претпостави дека температурата на топката е константна по целата нејзина површина.

Решение: Од вкупната моќност на зрачење на топката P може да се најде вкупната емисиона способност W која всушност претставува површинска густина на зрачењето

$$P = W \cdot S = W \cdot 4\pi r^2 . \qquad (1)$$

Од друга страна вкупната емисиона способност W е поврзана со температурата на површината на топката преку Штефан-Болцмановиот закон кој за апсолутно црно тело гласи

$$W = \sigma \cdot T^4 . \qquad (2)$$

Од релациите (1) и (2) може да се најде температурата на површината на топката

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi \sigma r^2}} . \qquad (3)$$

Од Виновиот закон, се добива бараната бранова должина знаејќи ја температурата на телото,

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{T} = b \cdot \sqrt[4]{\frac{4\pi\sigma r^2}{P}} = 5{,}63\,\mu\mathrm{m}} \qquad (4)$$

Задача 4. Во еден експеримент електрони со занемарливо мала кинетичка енергија влетуваат во простор во кој има хомогено електрично поле. Утврдено е дека по напуштањето на тој простор електроните пројавуваат бранови својства и им соодветствува бранова должина λ = 0,1 nm. Да се пресмета промената на потенцијалот на електричното поле од местото каде што влетуваат електроните до местото каде тие го напуштаат полето.

Решение: Според релацијата на Луј де Броли брановата должина λ која им одговара на елементарните честички е поврзана со нивниот импулс p како

$$\lambda = \frac{h}{p} . \tag{1}$$

Бидејќи електроните се движат со нерелативистички брзини нивниот импулс може да се пресмета со класичниот израз

$$p = mv . \tag{2}$$

Според законот за запазување на енергијата, промената на кинетичката енергија на електроните е еднаква на промената на нивната потенцијална енергија во електричното поле

$$\Delta E_k = \Delta E_p = eU , \tag{3}$$

каде што со e е означен полнежот на електронот. Поради тоа што почетната кинетичка енергија на електроните е занемарливо мала, нивната крајна кинетичка енергија (по напуштањето на полето) е

$$E_k = eU . \tag{4}$$

При мали брзини и кинетичката енергија може да се третира класично

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} . \tag{5}$$

Од релациите (4) и (5) потенцијалот на полето е

$$U = \frac{p^2}{2me} , \tag{6}$$

односно со употреба на релацијата на де Броли (1)

$$U = \frac{h^2}{2me\lambda^2} \approx 151 \text{ V}. \tag{7}$$

Задача 5. Нека единствениот електрон на јонот $A^{(Z\text{-}1)+}$ се наоѓа во основната состојба. Во таа состојба квадратот на средното растојание на електронот од јадрото r_0^2 може приближно да се изрази како сума од квадратите на неопределеностите на координатите, т.е. $r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, додека пак квадратот на средниот импулс може да се запише како сума од квдратите на неопределеностите на соодветните компоненти на импулсите, т.е. $p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2$. Согласно Хајзенберговиот принцип на неопределеност за врската помеѓу неопределеностите на импулсот и кооодинатата важи дека $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$, $\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2\Delta y}$ и $\Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2\Delta z}$. Да се определи минималната вредност на производот $p_0^2 r_0^2$.

Решение:

Со користење на релациите за Хајзенберговиот принцип на неопределеност, од условот на задачата добиваме:

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{\hbar^2}{4(\Delta y)^2} + \frac{\hbar^2}{4(\Delta z)^2} = \frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}\right]. \quad (1)$$

Поради рамноправноста на координатните оски x, y и z (сферна симетријата) следува дека

$$(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = (\Delta z)^2 = \frac{r_0^2}{3}. \quad (2)$$

Со замена на релацијата (2) во (1) добиваме $p_0^2 \geq \frac{9\hbar^2}{4r_0^2}$, од каде што следува дека $p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9\hbar^2}{4}$. Значи, минималната вредност на производот $p_0^2 r_0^2$ е $\frac{9\hbar^2}{4}$.