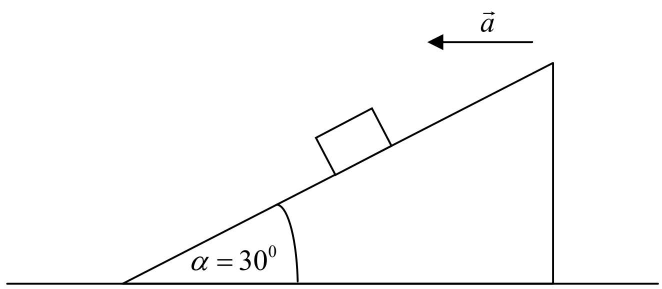
54. РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА – 2011 година
IV година

Задача 1. На едната страна од призма со агол $\alpha = 30^0$ се наоѓа тело (Слика 1). Коефициентот на триење при лизгање помеѓу телото и призмата изнесува $\mu = 0,35$. Во кои граници треба да биде забрзувањето со кое се движи призмата во насока означена на сликата, за телото да не се лизга ниту нагоре ниту надолу по призмата.



Слика 1

Решение:

За решавање на задачата треба да се разгледаат два случаи: прво, случајот кога телото не започнало да се лизга надолу по призмата и второ, случајот кога телото не започнало да се лизга нагоре по призмата.

I случај: На телото, пред да започне да се лизга надолу по призмата, дејствуваат силата на Земјина тежа $m\vec{g}$, силата на триење при мирување $\vec{F}_{tr1}$, силата $m\vec{a}_1$ која се јавува поради забрзаното движење на призмата, но во спротивна насока на забрзувањето $\vec{a}$ на призмата ($|\vec{a}_1| = |\vec{a}| = a$) и силата на нормална реакција на подлогата $\vec{N}_1$ (да се види сл. 1.1). Бидејќи телото не треба да се лизга надолу по призмата, равенката на движење во векторска форма е зададена со:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{tr1} + m\vec{a}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0} . \qquad (1)$$

Ако извршиме проекција на векторите на x и y-оската ќе добиеме:

x-оска: $$mg\sin\alpha = F_{tr1} + ma\cos\alpha . \qquad (2)$$

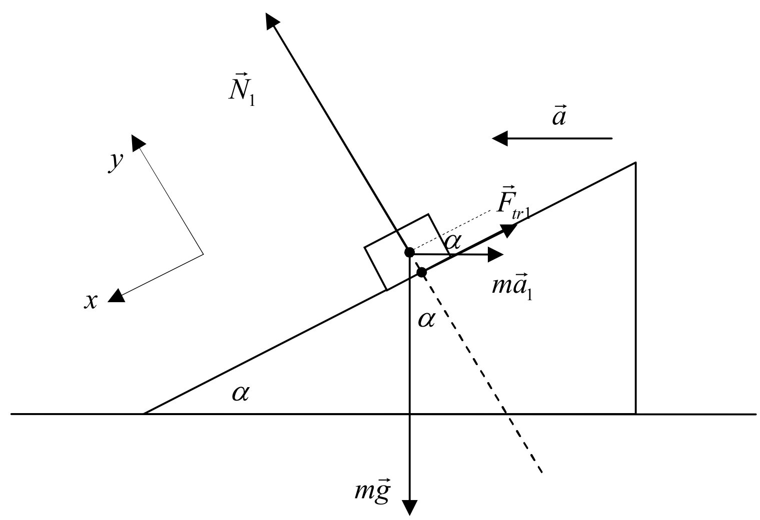
y-оска: $$N_1 = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha . \qquad (3)$$

Бидејќи силата на триење при мирување е помала или еднаква на силата на триење при лизгање т.е $F_{tr1} \le \mu N_1$, од релациите (2) и (3) се добива:

$$mg\sin\alpha \le \mu\left(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha\right) + ma\cos\alpha\,, \tag{4}$$

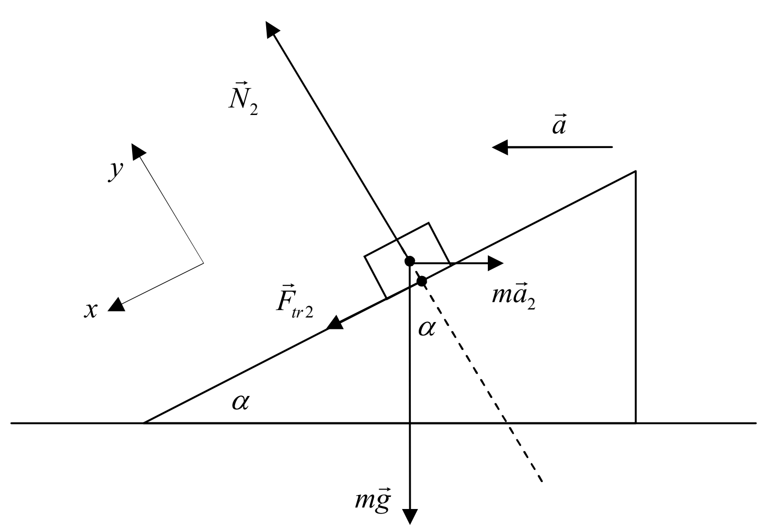
од каде што следува дека

$$a \ge g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = g\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mu}{\mu\mathrm{tg}\alpha + 1} = 1{,}85\ \mathrm{m/s^2}\,. \tag{5}$$



Слика 1.1

II случај: На телото, пред да започне да се лизга по призмата нагоре, дејствуваат силата на Земјина тежа $m\vec{g}$, силата на триење при мирување $\vec{F}_{tr2}$, силата $m\vec{a}_2$ која се јавува поради забрзаното движење на призмата, но во спротивна насока на забрзувањето $\vec{a}$ ($|\vec{a}_2| = |\vec{a}| = a$) и силата на нормална реакција на подлогата $\vec{N}_2$ (да се види сл. 1.2).



Слика 1.2

Бидејќи телото не треба да се лизга нагоре по призмата, равенката на движење во векторска форма е зададена со:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{tr2} + m\vec{a}_2 + \vec{N}_2 = \vec{0}\,. \tag{6}$$

Ако извршиме проекција на векторите на x и y-оската ќе добиеме:

x-оска: $$mg\sin\alpha + F_{tr2} = ma\cos\alpha\,. \tag{7}$$

y-оска: $$N_2 = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha\,. \tag{8}$$

На ист начин како претходно $F_{tr2} \le \mu N_2$, па од релациите (7) и (8) се добива:

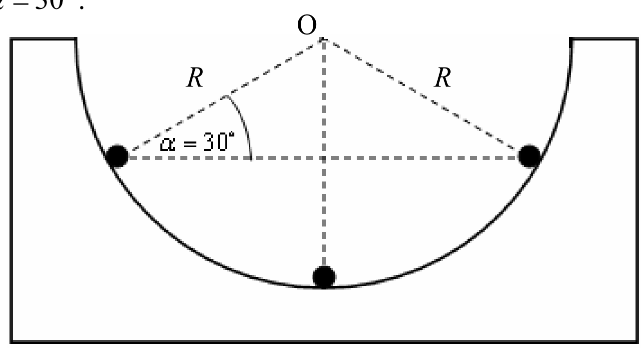
$$mg\sin\alpha + \mu\left(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha\right) \ge ma\cos\alpha\,, \tag{9}$$

од каде што следува дека

$$a \le g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha} = 11,40\ \mathrm{m/s^2}\,. \tag{10}$$

Од релациите (5) и (10) следува дека во случај кога $1,85\ \mathrm{m/s^2} \le a \le 11,40\ \mathrm{m/s^2}$, телото нема да се лизга по призмата ниту надолу ниту нагоре.

Задача 2. Три топчиња со еднаква маса и ист полнеж q се наоѓаат во рамнотежа во вдлабнат сад во форма на полусфера со радиус R (Слика 2). Ѕидовите на садот се непроводни, а триењето помеѓу топчињата и садот е занемарливо. Да се определи масата на топчињата, ако $\alpha = 30^0$.



Слика 2

Решение:

Според сликата, на топчето A дејствуваат силата на Земјина тежа $m\vec{g}$, Кулоновата сила $\vec{F}_{21}$ со која топчето B дејствува на топчето A, Кулоновата сила $\vec{F}_{31}$ со која топчето C дејствува на топчето A и силата на нормална реакција на подлогата $\vec{N}$. Бидејќи топчето A е во рамнотежа, збирот од векторите на сите сили кои дејствуваат на топчето е еднаква на нула, т.е.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{N} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Од сликата забележуваме дека аголот што го зафаќа векторот на силата на Земјина тежа со тангентата *t*, повлечена во точката каде се наоѓа топчето A (да се види сликата), изнесува $\alpha = 30^0$, како агол со заемно нормални краци со краците на аголот $\angle\mathrm{OAC} = \alpha$. Триаголникот OAC е рамнокрак, па следува дека $\angle\mathrm{AOC} = 180^0 - 2\alpha = 120^0$ и $\angle\mathrm{AOB} = 60^0$. Триаголникот OAB е рамностран, од каде што следува дека $\beta = 60^0 - \alpha = 30^0$. Бидејќи $\alpha + \delta + \beta = 90^0$ добиваме дека $\delta = 90^0 - \alpha - \beta = 30^0$. Доколку ги проектираме силите кои дејствуваат на топчето A на тангентата *t*, се добива:

$$mg\cos\alpha = F_{31}\cos(\beta + \delta) + F_{21}\cos\delta. \qquad (2)$$

Од сликата се забележува дека растојанието од топчето A до топчето B изнесува R (триаголникот OAB е рамностран), а од точката A до точката C растојанието изнесува $2R\cos\alpha$. Според тоа добиваме:

$$F_{21} = k\frac{q^2}{R^2}. \tag{3}$$

$$F_{31} = k\frac{q^2}{\left(2R\cos\alpha\right)^2} = k\frac{q^2}{4R^2\cos^2\alpha}. \tag{4}$$

Со замена на релациите (3) и (4) во релацијата (2), се добива:

$$mg\cos\alpha = k\frac{q^2}{4R^2\cos^2\alpha}\cos\left(\beta+\delta\right) + k\frac{q^2}{R^2}\cos\delta. \tag{5}$$

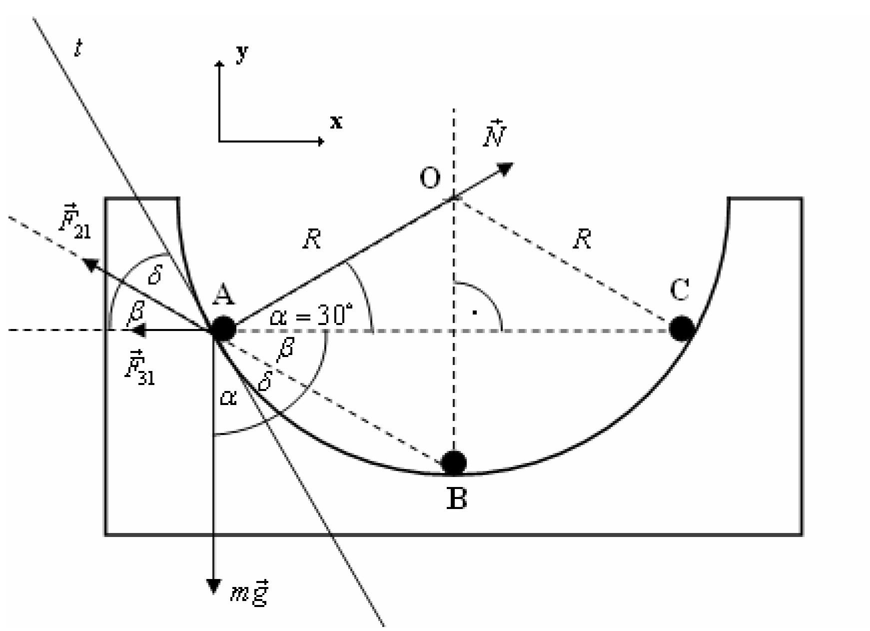
Со замена на вредностите на аглите, добиваме:

$$mg\cos 30^0 = k\frac{q^2}{4R^2\cos^2 30^0}\cos 60^0 + k\frac{q^2}{R^2}\cos 30^0, \tag{6}$$

односно

$$mg\frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{q^2}{6R^2} + k\frac{q^2}{R^2}\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{7}$$

Така, за масата m се добива: $m = k\dfrac{q^2}{gR^2\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{3}+\sqrt{3}\right)$.



Забелешка: Задачата може да се реши и со проектирање на силите на x-оската и y-оската.

Задача 3. Предмет и неговиот исправен лик стојат симетрично во однос на фокусот на леќата. Растојанието од предметот до фокусот изнесува 4,0 cm.

а) Колкаво е фокусното растојание на леќата?

б) Колкаво е линиското зголемување на леќата?

***Решение**:*

Ако леќата е собирна, тогаш предметот се наоѓа помеѓу фокусот и леќата, а ликот е имагинарен, па ќе важи релацијата:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}. \tag{1}$$

Бидејќи предметот и ликот се подеднакво оддалечени од фокусот, на растојание x = 4 cm, важи $p = f - x$ и $l = f + x$, па релацијата (1) се запишува како:

$$\frac{1}{f-x} - \frac{1}{f+x} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Оттука се добива квадратната равенка:

$$f^2 - 2f \cdot x - x^2 = 0, \tag{3}$$

чие што, физички прифатливо решение е:

$$f = x \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = 9{,}7\ \text{cm}.$$

Линиското зголемување ќе биде:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p} = \frac{f+x}{f-x} = \frac{x\left(1+\sqrt{2}\right)+x}{x\left(1+\sqrt{2}\right)-x} = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4.$$

Ако леќата е растурна тогаш положбите на предметот и ликот се обратни, предметот се наоѓа позади фокусот $p = f + x$, а ликот се формира помеѓу леќата и фокусот, $l = f - x$. Равенката на леќата гласи:

$$\frac{1}{f+x} - \frac{1}{f-x} = -\frac{1}{f}\ , \tag{4}$$

а решението е исто како и во претходниот случај.

Линиското зголемување, во овој случај, изнесува:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p} = \frac{f-x}{f+x} = \frac{x\left(1+\sqrt{2}\right)-x}{x\left(1+\sqrt{2}\right)+x} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 0{,}41\,.$$

Задача 4. Електрон со кинетичка енергија 200 keV налетува на позитрон кој мирува и притоа настанува анихилација од која се добиваат два фотона со еднакви енергии. Да се најде вредноста на аголот меѓу фотоните. Да се искористи дека релативистичкиот импулс на електронот се изразува како $p = \sqrt{2E_k E_0 + E_k^{\,2}}\,/\,c$, каде што E_k е кинетичката енергија, а E_0 е енергијата во мирување на електронот.

***Решение*:**

При судирот на електронот и позитронот важи законот за запазување на вкупната енергија

$$E_0 + E_0 + E_k = 2E\,, \tag{1}$$

кој кажува дека збирот на кинетичката енергијата на електронот и енергиите на мирување на електронот и позитронот е еднаков на збирот на енергиите на двата фотони. Користејќи уште дека енергијата со масата во мирување е изразена како

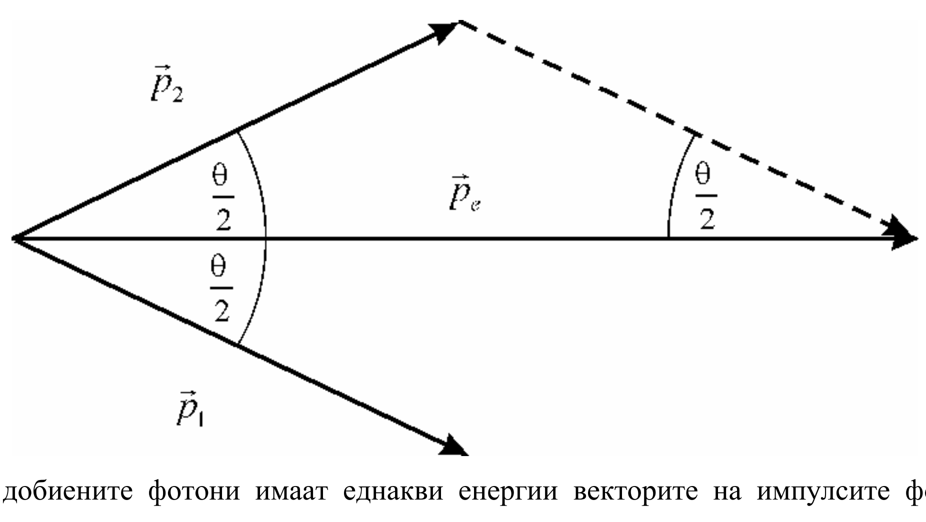
$$E_0 = m_0 c^2\,, \tag{2}$$

се добива енергијата на фотоните

$$E = \frac{2m_0 c^2 + E_k}{2}\,. \tag{3}$$

При судирот на електронот и позитронот важи и законот за запазување на импулсот. Според него импулсот на електронот (бидејќи позитронот мирува) е еднаков на збирот на импулсите на фотоните

$$\vec{p}_e = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,. \tag{4}$$



Бидејќи добиените фотони имаат еднакви енергии векторите на импулсите формираат рамнокрак триаголник. Од сликата се гледа дека

$$p_e = p_1 \cos\frac{\theta}{2} + p_2 \cos\frac{\theta}{2} = 2p_1 \cos\frac{\theta}{2}\,, \tag{5}$$

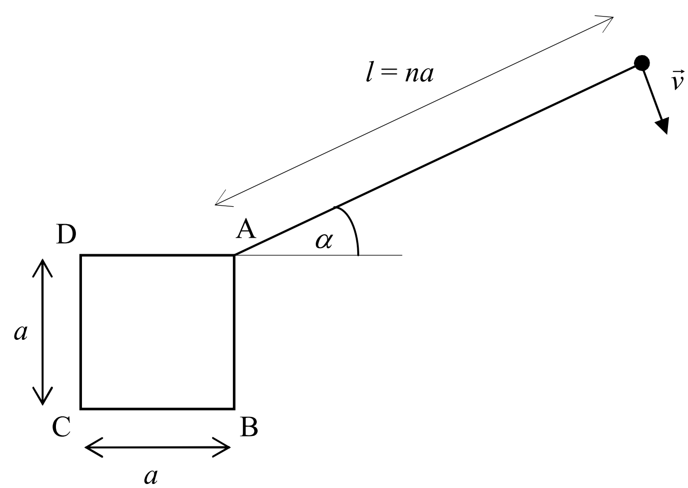
бидејќи фотоните имаат импулси со еднакви интензитети $p_1 = p_2$. Ако се употребат вредностите на импулсите на електронот и фотонот

$$p_e = \frac{\sqrt{2E_k m_0 c^2 + E_k{}^2}}{c}; \quad p_1 = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c} = \frac{2m_0c^2 + E_k}{2c}, \tag{6}$$

се добива аголот меѓу фотоните

$$\theta = 2\arccos\frac{p_e}{2p_1} = 2\arccos\frac{\sqrt{2E_k m_0 c^2 + E_k{}^2}}{2m_0c^2 + E_k} \approx 132^\circ. \tag{7}$$

Задача 5. Топче е прикачено на едниот крај на нерастеглив конец со должина $l = na$, каде што n е природен број, $a > 0$. Другиот крај на конецот е прикачен во точката A на тело со напречен пресек во форма на квадрат со страна a, кое е поставено на хоризонтална подлога (Слика 3). На топчето му се соопштува брзина v во правец нормален на конецот, така што топчето се движи по хоризонталната подлога без триење. Конецот зафаќа агол α со страната DA на квадратот, како што е прикажано на сликата. Да се покаже дека времето потребно конецот да се намота на телото изнесува $t = \dfrac{na}{v}\left[\alpha + \dfrac{\pi}{4}(n+1)\right]$. Од корист може да биде следната формула: $1+2+...+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$.



Слика 3

Решение:

Бидејќи на топчето му е соопштена брзина v во насока нормална на конецот, чија должина е $l = na$, таа всушност претставува линиска брзина на топчето. Помеѓу топчето и подлогата нема триење, па според тоа, големината на линиската брзина нема да се менува со тек на времето.

- Растојанието од точката 1 до точката 2 (да се види сликата) топчето ќе го помине за време:

$$t_\alpha = \frac{\alpha}{\omega_\alpha} = \frac{\alpha}{v/l} = \frac{\alpha l}{v}, \qquad (1)$$

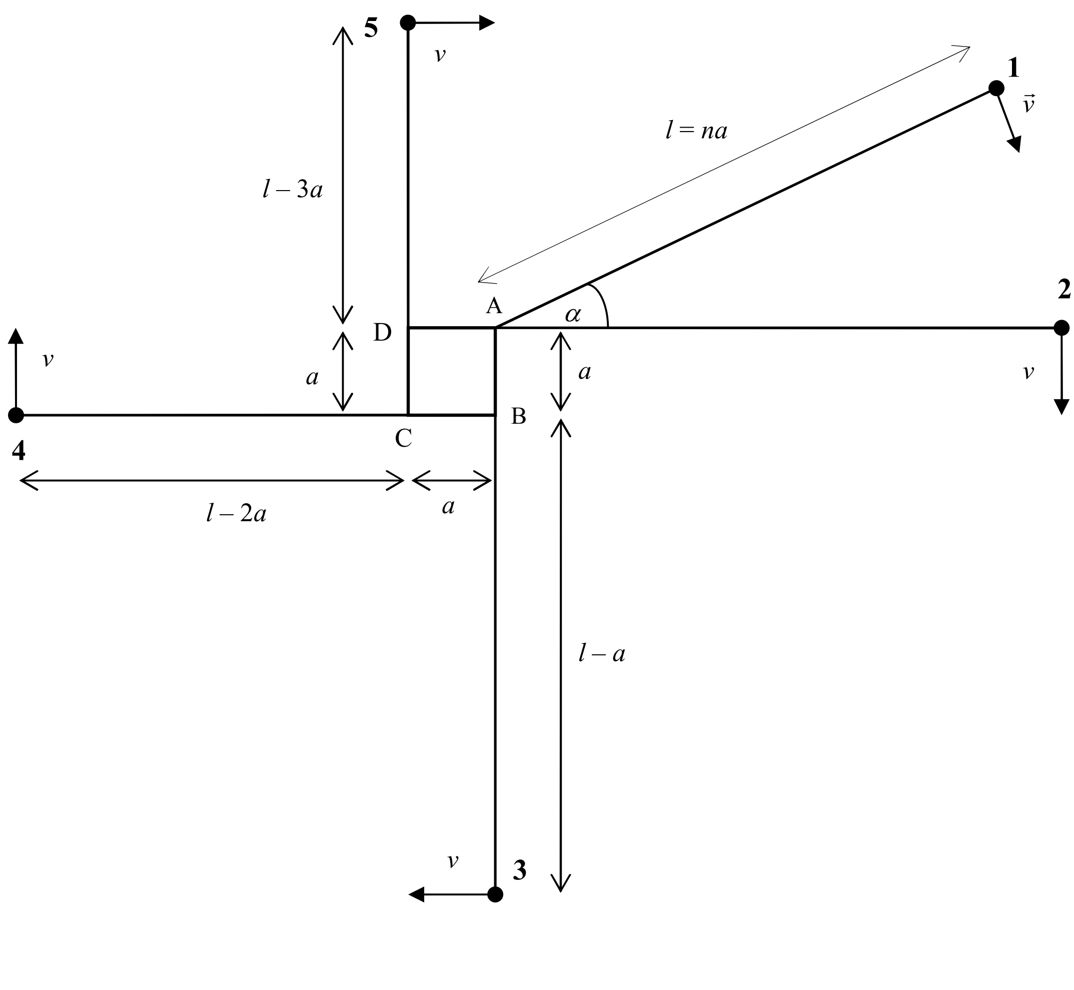
каде што $\omega_\alpha = v/l$ е аголната брзина на топчето за време на неговото движење од 1 до 2.

- Од точката 2 до точката 3 топчето продолжува да се движи со истата аголна брзина $\omega_1 = \omega_\alpha = v/l$, при што конецот се поместува за агол од $\pi/2$. Растојанието од точката 2 до точката 3 топчето ќе го помине за време:

$$t_1 = \frac{\pi/2}{\omega_1} = \frac{\pi/2}{v/l} = \frac{\pi l}{2v}\,. \tag{2}$$

- Од точката 3 до точката 4 топчето ќе се движи со линиска брзина v околу точката B по кружница со радиус $l-a$. Така, аголната брзина на топчето изнесува $\omega_2 = v/\left(l-a\right)$. Притоа, конецот се поместува за агол од $\pi/2$, па растојанието од точката 3 до точката 4 топчето ќе го помине за време:

$$t_2 = \frac{\pi/2}{\omega_2} = \frac{\pi/2}{v/\left(l-a\right)} = \frac{\pi\left(l-a\right)}{2v}\,. \tag{3}$$



- Од точката 4 до точката 5 топчето ќе се движи со линиска брзина v околу точката C по кружница со радиус $l-2a$. Така, аголната брзина на топчето изнесува $\omega_3 = v/\left(l-2a\right)$. Растојанието од точката 4 до точката 5 топчето ќе го помине за време:

$$t_3 = \frac{\pi/2}{\omega_3} = \frac{\pi/2}{v/\left(l-2a\right)} = \frac{\pi\left(l-2a\right)}{2v}\,. \tag{4}$$

- Продолжувајќи ја постапката се добива дека на крај топчето ќе се движи со линиска брзина v по кружница со радиус $l-\left(n-1\right)a$, по што конецот целосно ќе се намота на телото. Така, аголната брзина на топчето изнесува $\omega_n = v/\left(l-\left(n-1\right)a\right)$, од каде за времето се добива:

$$t_n = \frac{\pi/2}{\omega_n} = \frac{\pi/2}{v/\left(l-\left(n-1\right)a\right)} = \frac{\pi\left(l-\left(n-1\right)a\right)}{2v}\,. \tag{5}$$

Вкупното време потребно целиот конец да се намота на телото изнесува:

$$\begin{aligned}
t &= t_\alpha + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = \frac{\alpha l}{v} + \frac{\pi l}{2v} + \frac{\pi\left(l-a\right)}{2v} + \frac{\pi\left(l-2a\right)}{2v} + \cdots + \frac{\pi\left(l-\left(n-1\right)a\right)}{2v} = \\
&= \frac{\alpha l}{v} + \underbrace{\left(\frac{\pi l}{2v} + \frac{\pi l}{2v} + \cdots + \frac{\pi l}{2v}\right)}_{n-\text{пати}} - \left(\frac{\pi a}{2v} + \frac{\pi 2a}{2v} + \cdots \frac{\pi\left(n-1\right)a}{2v}\right) = \\
&= \frac{\alpha l}{v} + n\frac{\pi l}{2v} - \frac{\pi a}{2v}\left(1+2+\cdots\left(n-1\right)\right) = \frac{\alpha l}{v} + n\frac{\pi na}{2v} - \frac{\left(n-1\right)n}{2}\frac{\pi a}{2v} = \frac{na\alpha}{v} + \frac{n\left(n+1\right)\pi a}{4v}
\end{aligned} \tag{6}$$

Значи вкупното време изнесува $t = \dfrac{na}{v}\left[\alpha + \dfrac{\pi}{4}\left(n+1\right)\right]$.