LII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА ВО РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
16 мај 2009

IV година

Задача 1. Од местото А во 10 часот поаѓа брз воз кон местото Б. Во исто време од местото Б кон местото А поаѓаат поштенски и патнички воз, при што брзината на патничкиот воз е два пати помала од брзината на поштенскиот воз. Брзиот воз стигнува во местото Б во 14 часот истиот ден. По пат се сретнува со поштенскиот воз не пред 12 часот. Да се најде времето на пристигнување на патничкиот воз во местото А, ако е познато дека временскиот интервал меѓу сретнувањата на брзиот воз со поштенскиот и патничкиот воз не е помал од 40 минути.

Решение:

Нека v_1 е брзината на брзиот воз, v_2 е брзина на поштенскиот воз и v_3 е брзина на патничкиот воз. Од условот на задачата следува:

$$v_2 = 2v_3 \,. \tag{1}$$

Вкупното време на движење на брзиот воз од местото А до местото Б изнесува:

$$t_1 = 14\text{ h} - 10\text{ h} = 4\text{ h} \,. \tag{2}$$

Времето поминато од поаѓањето на возовите до сретнување на брзиот и поштенскиот воз, од условот на задачата, е:

$$t_2 \geq 12\text{ h} - 10\text{ h} = 2\text{ h} \,. \tag{3}$$

Временскиот интервал меѓу сретнувањата на брзиот воз со поштенскиот и патничкиот воз, од условот на задачата, не е помал од 40 минути, т.е.

$$\Delta t_{12} \geq 40\,\text{min} = 2/3\text{ h} \,. \tag{4}$$

Нека времето потребно патничкиот воз да пристигне од местото Б до местото А го означиме со t_3, а растојанието од местото А до местото Б со S.

Од релацијата (2) следува

$$\frac{S}{v_1} = t_1 = 4\text{ h} \,. \tag{5}$$

Од релациите (3) и (1) следува:

$$\frac{S}{v_1 + v_2} = t_2 \geq 2\text{ h} \quad \rightarrow \quad \frac{S}{v_1\left(1 + \dfrac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{\dfrac{S}{v_1}}{1 + 2\dfrac{v_3}{v_1}} \geq 2\text{ h} \,. \tag{6}$$

На ист начин, од релациите (4) и (1) следува:

$$\frac{S}{v_1 + v_3} - \frac{S}{v_1 + v_2} = \Delta t_{12} \geq \frac{2}{3}\text{ h} \quad \rightarrow \quad \frac{S}{v_1}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{v_3}{v_1}} - \frac{1}{1 + 2\dfrac{v_3}{v_1}}\right) \geq \frac{2}{3}\text{ h} \,. \tag{7}$$

Со замена на релацијата (5) во (6) се добива:

$$\frac{4}{1 + 2\dfrac{v_3}{v_1}} \geq 2 \tag{8}$$

од каде што следува дека:

$$\frac{v_3}{v_1} \leq \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Со замена на релацијата (5) во (7) се добива:

$$4\left(\frac{1}{1+\frac{v_3}{v_1}} - \frac{1}{1+2\frac{v_3}{v_1}}\right) \geq \frac{2}{3}. \tag{10}$$

Со воведување на смената $x = v_3 / v_1$ од релацијата (10) се добива:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x} \geq \frac{1}{6} \tag{11}$$

Со средување на неравенството (11) се добива:

$$\frac{-2x^2+3x-1}{6\left(1+x\right)\left(1+2x\right)} \geq 0. \tag{12}$$

Бидејќи $x > 0 \Rightarrow 6(1+x)(1+2x) > 0$, па за да биде задоволено неравенството (12) потребно е да важи:

$$-2x^2+3x-1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x+1 \leq 0. \tag{13}$$

Неравенството (13) може да се преуреди на следниов начин:

$$2x^2-3x+1 = 2x^2-2x-x+1 = 2x\left(x-1\right)-\left(x-1\right) = \left(x-1\right)\left(2x-1\right) \leq 0. \tag{14}$$

Неравенството (14) ќе биде исполнето во следниве случаи:

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{14.1}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{14.2}$$

Гледаме дека системот неравенки (14.1) има решение $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, додека пак системот неравенки (14.2) нема решение. Значи

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1. \tag{15}$$

Од (9) добивме дека $x \leq \frac{1}{2}$, а од (15) добивме дека $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Оттука следува дека единствено решение за *x* е $x = \frac{1}{2}$, што значи:

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_3 = \frac{1}{2}v_1. \tag{16}$$

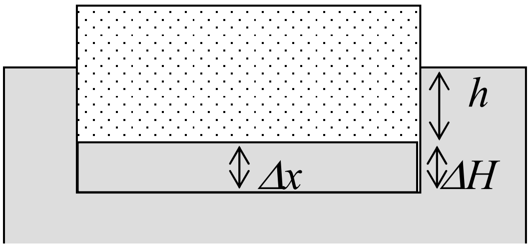
Конечно, со користење на релациите (16) и (5), добиваме дека времето потребно патничкиот воз да пристигне од местото А во местото Б изнесува:

$$t_3 = \frac{S}{v_3} = 2\frac{S}{v_1} = 8\ \text{h},$$

што значи дека патничкиот воз ќе пристигне во местото А во 10 h + 8 h = 18 h истиот ден.

Задача 2. Цилиндричен сад со тенки ѕидови има маса M, висина H и површина на основата S. Садот е наполнет со гас и плива во вода (сл. 1). Поради недоволно добра херметичност на долниот дел на цилиндерот во него навлегува вода, па тој пропаѓа подлабоко во водата за ΔH. Колкав бил притисокот на гасот во садот на почетокот? Атмосферскиот притисок и температурата не се менуваат.

Слика 1а



Слика 1б

Решение:

Нека првобитно цилиндерот бил потопен во вода до длабочина h (видете ја сликата 1а). Тогаш е:

$$Mg = \rho_v ghS \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{M}{\rho_v S},$$

каде што ρ_v е густината на водата. Не е тешко да се види дека поради престанокот на добрата херметичност цилиндерот ќе навлезе за длабочина ΔH и водата во цилиндерот ќе навлезе за длабочина $\Delta x = \Delta H$. Всушност новиот услов за рамнотежа, во условите дадени на сликата 1б ќе биде:

$$Mg + \rho_v gS\ \Delta x = \rho_v gS\left(h + \Delta H\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \Delta H$$

Ќе го пронајдеме прво притисокот на гасот p_1 во цилиндерот во услови кога во него делумно навлегла вода. Збирот на притисокот p_1 и на притисокот на столбот од вода со висина ΔH на дното на цилиндерот треба да биде еднаков на притисокот на водениот столб на длабочина $h+\Delta H$:

$$p_1 + \rho_v g\ \Delta H \ = p + \ \rho_v g\left(h + \Delta H\right),$$

од каде што следува:

$$p_1 = p + \ \rho_v gh = p + \frac{Mg}{S},$$

p е атмосферскиот притисок.

Гасот зафаќа волумен $V_1 = S\left(H - \Delta H\right)$ и има притисок p_1. Според законот на Бојл-Мариот:

$$p_1 V_1 = p_0 V_0,$$

каде што p_0 е првобитниот, баран во задачата, притисок на гасот кога тој зафаќал волумен $V_0 = SH$.

Според тоа

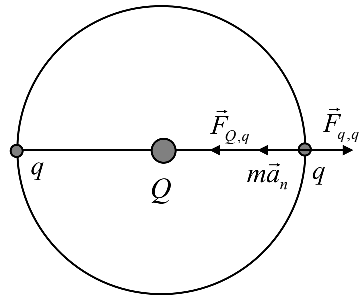
$$\left(p + \frac{Mg}{S}\right) S\left(H\text{-}\Delta H\right) = p_0 SH$$

од каде што за првобитниот притисок p_0 се добива:

$$p_0 \ = \left(p + \frac{Mg}{S}\right)\left(1 - \frac{\Delta H}{H}\right).$$

Задача 3. Две исти честички со маса m и полнеж еднаков по апсолутна вредност на q се движат по кружница со радиус R околу честичка со полнеж еднаков по апсолутна вредност на Q, кој што е поставен во центарот на кружницата. Притоа, честичките со полнеж q се дијаметрално поставени. Колкава е аголната брзина на полнежите q? Колкав е односот на вкупната кинетичка и потенцијална енергија на системот?

Решение:



Полнежите на честичките q и Q мораат да имаат спротивен знак за честичките со полнеж q да се движат по кружница.

На секоја од честичките со полнеж q дејствува сила која е резултат на заемнодејството на полнежот q со полнежот Q ($\vec{F}_{Q,q}$) и меѓусебното заемнодејство на полнежите q ($\vec{F}_{q,q}$) (види ја сликата):

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qQ}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right]. \tag{1}$$

Како резултат на оваа сила полнежите q имаат центрипетално забрзување дадено со:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R\,. \tag{2}$$

Од релациите (1) и (2) следува:

$$m\omega^2 R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qQ}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right], \tag{3}$$

од каде што за аголната брзина се добива:

$$\omega = \frac{1}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 mR}(4Q-q)q}\,. \tag{4}$$

Кинетичката енергија на системот е:

$$E_k = 2\frac{mv^2}{2} = m(\omega R)^2 = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0 R}(4Q-q)q\,. \tag{5}$$

Потенцијалната енергија на системот бројно е еднаква на работата која се врши за пренесување на полнежите q од бесконечност на растојание R од полнежот Q. За пренесување на едниот полнеж q во полето на полнежот Q извршена е работа:

$$A_1 = -q\varphi_1 = -q\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}\,, \tag{6}$$

а за пренесување на другиот полнеж q во полето на полнежите Q и q извршена е работа:

$$A_2 = -q\varphi_2 = -q\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{2R}\right). \tag{7}$$

Вкупната потенцијална енергија на системот е:

$$E_p = A_1 + A_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q^2}{2R} - 2\frac{qQ}{R}\right) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R}\cdot(4Q-q)q\,. \tag{8}$$

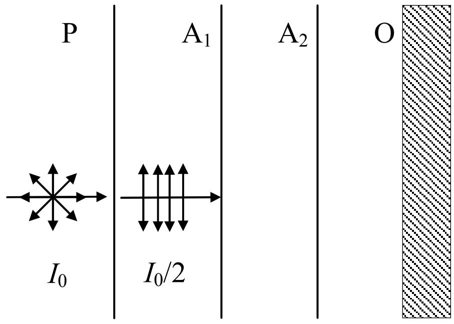
Од релациите (5) и (8) се добива:

$$\frac{E_k}{E_p} = -\frac{1}{2}\,.$$

Задача 4. Неполаризирана светлина со интензитет I_0 поминува низ систем составен од поларизатор, два анализатори и рамно огледало (сл. 2). Оптичките оски на поларизаторот P и вториот анализатор A_2 се под агол од 90^0. Под каков агол α треба да биде оптичката оска на првиот анализатор A_1 во однос на поларизаторот P, така што интензитетот на светлината која излегува од системот да биде максимален? При поминување на неполаризирана светлина низ поларизатор се добива поларизирана светлина чиј интензитет е два пати помал од интензитетот на упадната неполаризирана светлина. Рамното огледало да се земе за идеално рефлектирачко.

Решение:

Интензитетот на неполаризираната светлина според условот на задачата е I_0. Интензитетот на поларизираната светлина која упаѓа на првиот анализатор е $I_P = I_0/2$. Ќе сметаме дека оптичките оски помеѓу поларизаторот P и првиот анализатор A_1 изнесува α. Според законот на Мали, интензитетот на светлината на излез од првиот анализатор е:



Слика 2

$$I_{A_1} = I_P \cos^2\alpha = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha . \qquad (1)$$

Оваа светлина поминува низ вториот анализатор A_2. Бидејќи, од условот на задачата, аголот помеѓу оптичките оски на поларизаторот и вториот анализатор е 90^0, а аголот помеѓу оптичките оски на поларизаторот и првиот анализатор е α следува дека аголот помеѓу оптичките оски на првиот и вториот анализатор е $90^0 - \alpha$. Така, според законот на Малис, интензитетот на светлината на излез од вториот анализатор изнесува:

$$I_{A_2} = I_{A_1}\cos^2\left(90^0 - \alpha\right) = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha . \qquad (2)$$

По излезот од вториот анализатор светлината се рефлектира од рамното огледало O и поминува низ вториот анализатор без промена на неговиот интензитет:

$$I'_{A_2} = I_{A_2} . \qquad (3)$$

По поминување на светлината повторно низ првиот анализатор интензитетот на излез од A_1 ќе изнесува:

$$I'_{A_1} = I'_{A_2}\cos^2\left(90^0 - \alpha\right) = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha \cdot \sin^4\alpha , \qquad (4)$$

Аналогно како претходно, при излез на светлината низ поларизаторот нејзиниот интензитет ќе изнесува:

$$I'_P = I'_{A_1}\cos^2\alpha = \frac{I_0}{2}\cos^4\alpha \cdot \sin^4\alpha . \qquad (5)$$

Со замена на изразот $\sin\left(2\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ во релацијата (5) за излезниот интензитет на светлината се добива:

$$I'_P = \frac{I_0}{2}\cos^4\alpha \cdot \sin^4\alpha = \frac{I_0}{2}\left[\frac{\sin\left(2\alpha\right)}{2}\right]^4 = \frac{I_0}{32}\sin^4\left(2\alpha\right) . \qquad (6)$$

Максимална вредност за интензитетот на излезна светлина се добива во случај кога $\sin^4\left(2\alpha\right) = 1$, од каде што се добива $\alpha = 45^0$.

Задача 5. Во емисиониот спектар на атом на водород воочени се спектрални линии со бранови должини $\lambda_1 = 97,25$ nm, $\lambda_2 = 388,9$ nm, $\lambda_3 = 397$ nm, $\lambda_4 = 1093,8$ nm, $\lambda_5 = 2630$ nm и $\lambda_6 = 4050$ nm. На кои серии припаѓаат овие спектрални линии? При кои премини на електроните во атомот доаѓа до емисија на фотони со наведените бранови должини? Ридберговата константа е $R = 1,0973731 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.

Решение:

При премин на електрон од *n*-то на *k*-то енергетско ниво се емитира фотон со бранова должина:

$$\lambda_{n\to k} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{k^2 n^2}{R\left(n^2 - k^2\right)}. \tag{1}$$

Од релацијата (1) за квантниот број *n* се добива:

$$n = k\sqrt{\frac{R\lambda_{n\to k}}{R\lambda_{n\to k} - k^2}}. \tag{2}$$

Од релацијата (2) за квантниот број *n* да има реални вредности потребно е да биде исполнето:

$$k < \sqrt{R\lambda_{n\to k}}. \tag{3}$$

За линиите во спектарот да бидат емисиони потребно е да важи:

$$n \geq k + 1, \tag{4}$$

па со замена на релацијата (4) во (2) се добива неравенството:

$$\frac{k}{k+1}\sqrt{\frac{R\lambda_{n\to k}}{R\lambda_{n\to k} - k^2}} \geq 1. \tag{5}$$

Со замена на вредностите за брановите должини во релацијата (3) за квантниот број *k* се добиваат следниве вредности:

$$k_1 < 1,033,\ k_2 < 2,066,\ k_3 < 2,087,\ k_4 < 3,465,\ k_5 < 5,372,\ k_6 < 6,667. \tag{6}$$

Квантните броеви k_i ($i = 1,2,3,4,5,6$) кои што ги задоволуваат релациите (5) и (6) се:

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 2,\ k_4 = 3,\ (k_5)_1 = 4,\ (k_5)_2 = 5,\ (k_6)_1 = 4,\ (k_6)_2 = 5,\ (k_6)_3 = 6. \tag{7}$$

Со замена на овие вредности во релацијата (2) за квантниот број *n* се добиваат следниве можни вредности:

$$n_1 = 4,\ n_2 = 8,\ n_3 = 7,\ n_4 = 6,$$

$$(n_5)_1 = 6,\ (n_5)_2 = 13,67,\ \text{од каде следува}\ n_5 = 6$$

$$(n_6)_1 = 5,\ (n_6)_2 = 7,56,\ (n_6)_3 = 13,76\ \text{од каде следува}\ n_6 = 5. \tag{8}$$

Така, со користење на релациите (7) и (8) се добиваат следниве премини на електроните во атомот:

$4 \to 1$, Лајмановa серија

$\begin{cases} 8 \to 2, \\ 7 \to 2, \end{cases}$ Балмерова серија

$6 \to 3$, Пашенова серија

$\begin{cases} 6 \to 4, \\ 5 \to 4, \end{cases}$, Брекетова серија.