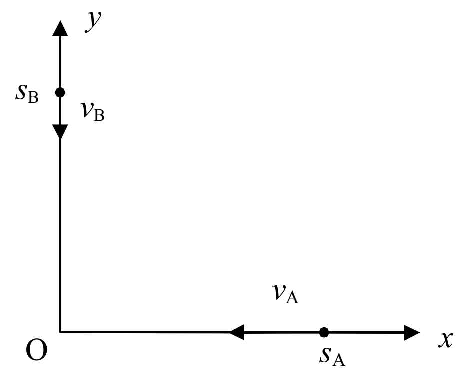
LIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА ВО РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
8 мај 2010

IV година

Задача 1. Две материјални точки **A** и **B** се движат по x и y оската на даден координатен систем xOy, соодветно. Во почетниот момент на време ($t=0$), материјалната точка **A** има координата s_A = 5 m, а **B** има координата s_B = 10 m. **A** и **B** се движат кон координатниот почеток O со константни брзини v_A = 4 m/s и v_B = 2 m/s, соодветно (сл. 1). Колкаво е минималното растојание на коешто може да се најдат материјалните точки?



Слика 1

Решение:

Во даден момент на време t, координатата на материјалната точка **A** ќе биде:

$$x(t) = s_A - v_A t = 5 - 4t\,, \tag{1}$$

а на материјалната точка **B**:

$$y(t) = s_B - v_B t = 10 - 2t\,. \tag{2}$$

Во тој момент на време, растојанието помеѓу **A** и **B** ќе биде:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{(5-4t)^2 + (10-2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 80t + 125}\,. \tag{3}$$

Начин 1: Минималното растојание на коешто можат да се најдат материјалните точки можеме да го определиме со користење на извод на функција. Со наоѓање на првиот извод на функцијата $r(t)$ по времето t и негово изедначување со нула, ќе го најдеме времето τ после кое материјалните точки ќе се најдат на минимално растојание. Така, се добива:

$$r'(\tau) = \left.\frac{\mathrm{d}\,r(t)}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=\tau} = \frac{1}{2\sqrt{20\tau^2 - 80\tau + 125}}(40\tau - 80) = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = 2\,\mathrm{s}\,, \tag{4}$$

од кадешто за минималното растојание се добива:

$$r_{\min} = r(\tau) = \sqrt{20\tau^2 - 80\tau + 125} = 3\sqrt{5}\ \mathrm{m}\,. \tag{5}$$

Начин 2: Релацијата (3) можеме да ја преуредиме на следниот начин:

$$r(t)=\sqrt{20t^2-80t+125}=\sqrt{20(t^2-4t+4)+45}=\sqrt{20(t-2)^2+45}\,. \tag{6}$$

Бидејќи $(t-2)^2 \geq 0$ следува:

$$r(t)=\sqrt{20(t-2)^2+45} \geq \sqrt{20\cdot 0+45}\,\mathrm{m}=\sqrt{45}\,\mathrm{m}\,, \tag{7}$$

односно $r_{\min}=3\sqrt{5}\ \mathrm{m}$.

Начин 3: Од релациите (1) и (2) се добива дека:

$$\frac{5-x}{4}=\frac{10-y}{2} \quad \to \quad x=2y-15\,. \tag{8}$$

Така, за растојанието помеѓу материјалните точки **A** и **B** се добива:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2y-15)^2+y^2}=\sqrt{5y^2-60y+225}=\sqrt{5(y-6)^2+45} \geq \sqrt{45}\,\mathrm{m}\,,$$

односно $r_{\min}=3\sqrt{5}\ \mathrm{m}$.

Начин 4: Забележуваме дека изразот под коренот во релацијата (3) претставува равенка на парабола ($P(x)=ax^2+bx+c$). Бидејќи коефициентот пред квадратниот член има позитивен знак можеме да заклучиме дека функцијата $P(t)=20t^2-80t+125$ има минимум којшто се наоѓа во точката $-\dfrac{b}{2a}=2\mathrm{s}$ и тој минимум изнесува $P\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=45\,\mathrm{m}^2$. Оттука за минималното растојание се добива:

$$r_{\min}=r(2)=\sqrt{P(2)}=\sqrt{45}\,\mathrm{m}=3\sqrt{5}\,\mathrm{m}\,.$$

Задача 2. *Дури и младите морнари можеа да претпоставаат колкав дел од сантата мраз е под површината на океанот. Капетанот Смит веќе беше свесен за можните последици од ударот... Еден научник што стоеше меѓу исплашените патници на палубата рече: "Тоа е само врвот на ледениот брег..."* Во таа априлска ноќ, при мирно море и јасно небо исполнето со ѕвезди, густината на водата била $\rho_0 = 1{,}028 \cdot 10^3$ kg/m^3, а густината на мразот од ледениот брег во кој удрил Титаник била $\rho = 0{,}917 \cdot 10^3$ kg/m^3. Пресметајте колкав дел од сантата мраз била под површината на океанот.

Решение:

На ледениот брег дејствуваат две сили, силата тежа и силата на потисок (Архимедова сила). Равенката на движење за сантата запишана во векторски облик е

$$\vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{A}} = m \cdot \vec{a} \qquad (1)$$

Скаларниот облик на оваа равенка, при проекција на вертикална оска ќе даде

$$P = F_{\mathrm{A}} \qquad (2)$$

Ако ги внесеме изразите за соодветните сили, при што волуменот на сантата над површината да го означиме со V_1, а волуменот од сантата под површината со V_2, добиваме

$$\rho(V_1 + V_2)g = \rho_0 V_2 g$$

Од овде за бараниот израз наоѓаме

$$\frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad (3)$$

или

$\frac{V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}892$, што значи, дека скоро 90% од сантата е под површината на океанот.

Задача 3. Кога аголната фреквенција на изворот е ω_1, реактансата на некој кондензатор којшто е приклучен на изворот е еднаква на реактансата на некој индуктор кога тој се приклучи на истиот извор. (а) Ако фреквенцијата се промени на $\omega_2 = 2\omega_1$, да се пресмета односот на реактансата на индукторот и реактансата на кондензаторот? (б) Ако кондензаторот и индукторот се врзат сериски со отпорник со отпор R така што да формираат RLC коло, колкава ќе биде резонантната аголна фреквенција на колото?

Решение:

Реактансата на индукторот со индуктивитет L се пресметува според формулата:

$$X_L = \omega L\,,$$

додека реактансата на кондензаторот по формулата

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\,.$$

(а) Од еднаквоста на X_L и X_C при аголна фреквенција ω_1, добиваме

$$\omega_1 L = \frac{1}{\omega_1 C}\,,$$

од каде што

$$LC = \frac{1}{\omega_1^{\,2}}\,.$$

Кога аголната фреквенција е ω_2, имаме

$$\frac{X_L}{X_C} = \frac{\omega_2 L}{1/\omega_2 C} = \omega_2^{\,2} LC = (2\omega_1)^2 \frac{1}{\omega_1^{\,2}} = 4\,.$$

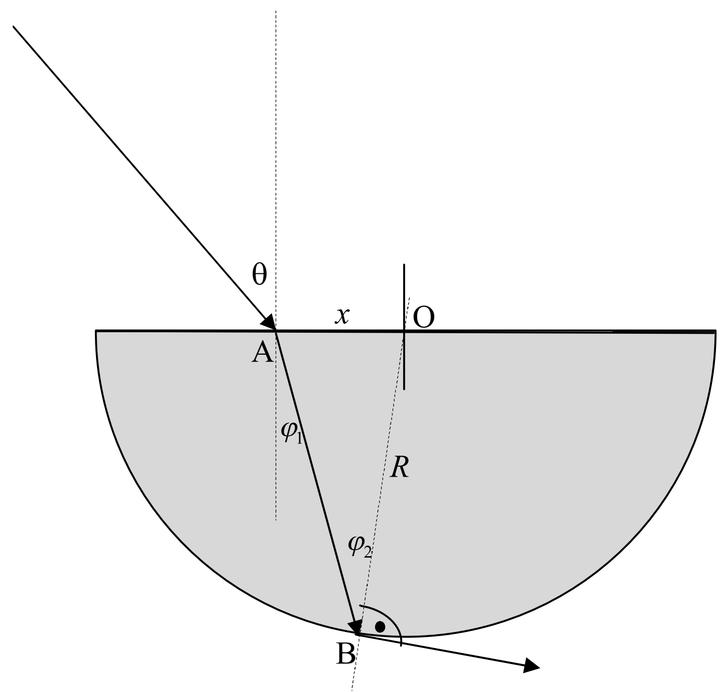
(б) Резонантната аголна фреквенција ω_0 е онаа вредност на ω за која важи $X_C = X_L$, па според тоа $\omega_0 = \omega_1$.

Задача 4. Стаклен полуцилиндер има радиус R и индекс на прекршување n. Светлински зрак, којшто патува во воздух упаѓа на рамната површина на полуцилиндерот под агол θ (сл. 2). При кои упадни положби на зракот на рамната површина, светлината ќе може да го напушти полуцилиндерот после првото упаѓање на цилиндричната површина? Под упадна положба на зракот на рамната површина се подразбира растојанието x помеѓу упадната точка на рамната површина и централната линија на рамната површина.

Решение:

За да може светлинскиот зрак сеуште да го напушти цилиндерот, потребно е на цилиндричната гранична површина стакло-воздух максималниот агол на прекршување да биде 90˚. Според тоа, ќе пресметаме при која упадна положба x на зракот што упаѓа под агол θ на рамната површина, аголот на прекршување на цилиндричната површина ќе биде 90˚. За сите положби, што се на растојание поголемо од ова, на цилиндричната површина ќе се појавува тотална рефлексија.

Законот за прекршување на светлината на рамната гранична површина воздух-стакло гласи:



Слика 2

$$\sin\theta = n\sin\varphi_1\,, \tag{1}$$

каде што φ_1 е аголот на прекршување. На цилиндричната граница стакло-воздух, при агол на прекршување од 90˚, законот за прекршување гласи:

$$\frac{\sin\varphi_2}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n} \Rightarrow n\sin\varphi_2 = 1\,, \tag{2}$$

каде што φ_2 е упадниот агол на цилиндричната гранична површина. Овој агол ќе го изразиме преку упадната положба x, од триаголникот AOB, применувајќи ја синусната теорема. За триаголникот AOB, познато ни е $\angle OAB \quad 90^\circ - \varphi_1$, $\overline{OB} = R$.
Според синусната теорема може да запишеме

$$\frac{R}{\sin(90^\circ - \varphi_1)} = \frac{x}{\sin\varphi_2} \Rightarrow \frac{R}{\cos\varphi_1} = \frac{x}{\sin\varphi_2}$$
$$\frac{R}{\sqrt{1-\sin^2\varphi_1}} = \frac{x}{\sin\varphi_2} \tag{3}$$

Ако $\sin\varphi_1$ и $\sin\varphi_2$ се изразат од (1) и (2) и се заменат во (3), се добива

$$\frac{R}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}}=\frac{x}{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{R}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}=\frac{x}{\frac{1}{n}}, \tag{4}$$

од каде што конечно ја добиваме вредноста на упадната положба, при којашто зракот сеуште би го напуштил цилиндерот, како функција од радиусот на полуцилиндерот, индексот на прекршуавње и упадниот агол, односно

$$x=\frac{R}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}. \tag{5}$$

За сите упадни положби во интервалот $\left[0,\frac{R}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right]$, зракот ќе може да го напушти полуцилиндерот, при првото упаѓање на цилинричната граница стакло-воздух. Истото решение се добива и во случај кога зракот упаѓа од десната страна на централната линија.

Задача 5. Атом во основна состојба има маса m. Во почетокот атомот е во мирување и е во екситирана состојба со енергија на екситација ΔE. Потоа атомот преминува во основната состојба со емитирање на еден фотон. Да се најде фреквенцијата на емитираниот фотон, земајќи дека при емитирање на фотонот атомот се поместува во спротивната насока. Да се земат предвид релативистичките ефекти.

Решение:

Бидејќи атомот во почетокот е во мирување неговиот импулс е еднаков на нула ($p_I = 0$). Притоа, вкупната енергија на атомот е еднаква на збирот од енергијата на мирување на атомот mc^2 и енергијата на екситација ΔE.

При деекситацијата на атомот (т.е. при емитирање на фотонот), импулсот на фотонот е еднаков на $p_{ph} = \dfrac{\hbar\omega}{c}$ (ω – фреквенција на емитираниот фотон), а неговата енергија е $E_{ph} = \hbar\omega$. При поместување на атомот неговиот импулс е еднаков на p, а неговата вкупна енергија во рамките на релативистичката теорија е $\sqrt{\left(p^2 + m^2c^2\right)\cdot c^2}$.

Од законот за запазување на импулсот се добива:

$$p_I = -p + p_{ph} \quad \to \quad p = p_{ph} = \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{1}$$

Со користење на законот за запазување на енергијата се добива:

$$mc^2 + \Delta E = \hbar\omega + \sqrt{\left(p^2 + m^2c^2\right)\cdot c^2}\ . \tag{2}$$

Со замена на релацијата (1) во (2) се добива

$$mc^2 + \Delta E - \hbar\omega = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} + m^2c^2\right)\cdot c^2}\ . \tag{3}$$

од каде што со мало средување, за фреквенцијата на емитираниот фотон се добива

$$\omega = \frac{\Delta E}{2\hbar}\cdot\frac{\Delta E + 2mc^2}{\Delta E + mc^2}\ .$$