РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА ВО РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
25 април 2009

IV година

Задача 1. Колкава треба да биде брзината на честичка за нејзината кинетичка енергија да биде n-пати поголема од нејзината енергија на мирување?

Решение:

Вкупната релативистичка енергија на честичка со маса m која што се движи со брзина v е дадена со:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k\,, \tag{1}$$

каде што m_0 е масата на мирување на честичката, m_0c^2 е енергијата на мирување на честичката и E_k е кинетичката енергија на честичката. Масата на честичката која што се движи со брзина v, според релативистичката теорија е:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2}$$

Од условот на задачата имаме:

$$E_k = n \cdot m_0c^2\,. \tag{3}$$

Со замена на релациите (2) и (3) во релацијата (1) се добива:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + n \cdot m_0c^2\,. \tag{4}$$

Од релацијата (4) за брзината на честичката конечно се добива:

$$v = c\frac{\sqrt{n\left(n+2\right)}}{n+1}\,.$$

Задача 2. Кружна платформа со маса m на чиј крај стои човек со маса два пати помала од масата на платформата се врти со аголна брзина ω околу вертикална оска, која што минува низ нејзиниот центар. Со колкава аголна брзина ќе се врти платформата ако човекот помине во центарот на платформата. Системот да се разгледува како затворен систем, а човекот да се смета како материјална точка.

Решение:

Бидејќи системот е затворен можеме да го примениме законот за запазување на моментот на импулсот.

Моментот на импулсот на системот кружна платформа – човек кога човекот се наоѓа на крајот на платформата е даден со:

$$L = (J_1 + J_2)\omega, \qquad (1)$$

каде што $J_1 = \frac{1}{2}mr^2$ е моментот на инерција на платформата, чијшто радиус е r, во однос на оската на ротација , $J_2 = \left(\frac{m}{2}\right)r^2$ е моментот на инерција на човекот, разгледуван како материјална точка.

Моментот на импулсот на системот кружна платформа – човек кога човекот се наоѓа во центарот на платформата е даден со:

$$L' = (J_1 + J_2')\omega', \qquad (2)$$

каде што $J_2' = \left(\frac{m}{2}\right)r' = \left(\frac{m}{2}\right)\cdot 0 = 0$ е момент на инерција на човекот во однос на оската кога тој се наоѓа во центарот на платформата.

Од законот за запазување на моментот на импулсот $L = L'$ се добива:

$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega', \qquad (3)$$

од каде што следува:

$$\omega' = 2\omega. \qquad (4)$$

Задача 3. Во почетокот на XX век за спектралната емисиона моќ на апсолутно црно тело тело $W_{(\lambda,T)}$ Планк ја дал релацијата $W_{(\lambda,T)} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$, каде што $C_1 = 2\pi hc^2$, $C_2 = hc/k$, h е Планковата константа, c е брзината на светлината во вакуум, k е Болцмановата константа, λ е брановата должина и T е апсолутната температура. Неколку години пред добивањето на оваа релација, Вин ја дал релацијата $W_{(\lambda,T)} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$, која што добро се согласува со добиените експериментални резултати само во областа на зрачење од апсолутно црно тело со мали бранови должини. Од друга страна, пак, Рејли и Џинс ја дале релацијата $W_{(\lambda,T)} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \cdot kT$, која што добро се согласува со експерименталните резултати само во областа на зрачење од апсолутно црно тело со големи бранови должини. Да се покаже дека Планковата релација за $W_{(\lambda,T)}$ преминува во:

- Виновата релација за мали бранови должини кога е исполнет условот $hc/(k\lambda T) >> 1$ и
- Рејли-Џинсовата релација за големи бранови должини кога е исполнет условот $hc/(k\lambda T) << 1$.

(Помош: Да се користи дека $e^x >> 1$ за $x >> 1$ и $e^x \approx 1 + x$ за $x << 1$)

Решение:

а) Во случај на мали бранови должини важи $\frac{C_2}{\lambda T} >> 1$. Оттука се добива дека $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} >> 1$, односно $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \approx e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$. Со замена на овој израз во Планковата релација се добива Виновата релација:

$$W_{(\lambda,T)} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \approx \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}}} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}.$$

б) Во случај на големи бранови должини важи $\frac{C_2}{\lambda T} << 1$. Оттука се добива дека $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \approx 1 + \frac{C_2}{\lambda T}$, односно $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \approx 1 + \frac{C_2}{\lambda T} - 1 = \frac{C_2}{\lambda T}$. Со замена на овој израз во Планковата релација се добива Рејли-Џинсовата релација:

$$W_{(\lambda,T)} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \approx \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{C_2}{\lambda T}} = \frac{C_1}{\lambda^4} \cdot \frac{T}{C_2} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^4} \cdot \frac{kT}{hc} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \cdot kT$$

Задача 4. Електрон има дадена кинетичка енергија E. За колку пати ќе се промени Де Бролиевата бранова должина на електронот доколку неговата кинетичката енергија се зголеми за ΔE . Електронот да се разгледува како нерелативистичка честичка.

Решение:

Де Бројлиевата бранова должина на електрон со кинетичка енергија E е зададена со релацијата:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} , \tag{1}$$

каде што m е масата на електронот. Аналогно, при зголемување на кинетичката енергија на електронот за ΔE за Де Бројлиевата бранова должина на електронот се добива:

$$\lambda ' = \frac{h}{p'} = \frac{h}{\sqrt{2m\left(E + \Delta E\right)}} . \tag{3}$$

Со делење на левите и десните страни на релациите (2) и (3) се добива:

$$\frac{\lambda '}{\lambda} = \sqrt{\frac{E}{E + \Delta E}} . \tag{4}$$

Задача 5. Со примена на Боровиот модел на атомот, а врз основа на Хајзенберговиот принцип на неопределеност $\Delta r_n \cdot \Delta p_n \geq \frac{\hbar}{2}$, да се определи минималната вредност на главниот квантен број *n* така што положбата и импулсот на електронот во водороден атом во *n*-тата квантна состојба можат истовремено да се одредат со грешка помала од 10%. Радиусот на орбитата на *n*-тата квантна состојба на електронот со маса m_0 е $r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{m_0 e^2}$, а линиската брзина на електронот при движење по орбитата на *n*-тата квантна состојба е $v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}$.

Решение:

Од условот на задачата за неопределеноста на положбата и импулсот на електронот имаме:

$$\Delta r_n = 0{,}1 \cdot r_n, \tag{1}$$

$$\Delta p_n = 0{,}1 \cdot p_n = 0{,}1 \cdot m_0 v_n, \tag{2}$$

каде што $p_n = m_0 v_n$ е импулсот на електронот на *n*-тата квантна состојба.

Користејќи го Хајзенберговиот принцип на неопределеност, како и релациите (1) и (2), се добива:

$$\Delta r_n \cdot \Delta p_n = \left(0{,}1 \cdot r_n\right) \cdot \left(0{,}1 \cdot p_n\right) = 0{,}01 \cdot m_0 r_n v_n \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3}$$

Користејќи ги дадените изрази за r_n и v_n за $m_0 v_n r_n$ се добива:

$$m_0 v_n r_n = m_0 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{m_0 e^2} = n\hbar. \tag{4}$$

Со замена на релацијата (4) во релацијата (3) се добива:

$$0{,}01 \cdot n\hbar \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{5}$$

од каде што следува $n \geq 50$